



Uplifting Mathematics for All

Guia didàctica

Punts que exploten

(Exploding Dots™)

Experiència 4:

La resta

Visió general	2
Piles i forats; punts i antipunts	4
La resta	7
Apartat opcional: <i>L'algoritme tradicional</i>	10
Material A: <i>La resta</i>	12
Solucions a les preguntes de «Material A»	13
Material B: <i>Exploracions brutals</i>	13

Recursos relacionats:

- Podeu accedir als vídeos i més recursos a [Exploding Dots - Global Math Project](#).
- Accedeix a [actividades guiadas en Desmos](#).
- Joga en línia amb el giny de [Dhimad](#) (inclou àlgebra).

Visió general

Objectius de l'alumne

La resta no existeix! Els alumnes entenen la resta com la suma de l'oposat. Amb la invenció dels antipunts, ara poden fer restes en una màquina $1 \leftarrow 10$ per mitjà de sumes, i explicar la noció de «portar-ne» de l'algorisme tradicional.

Breu resum de l'experiència

La resta no existeix! La resta no és altra cosa que la suma de l'oposat.

Inventem, doncs, la noció de l'oposat d'un punt —un antipunt (dibuixat en blanc)—. Un punt i un antipunt junts, com la matèria i l'antimatèria, simplement s'aniquilen l'un a l'altre —PUFFF!— i no en queda res.

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & + & \circ & = & \text{PUFFF!} \\ 1 & & -1 & & 0 \end{array}$$

Ara podem fer una resta en una màquina $1 \leftarrow 10$ simplement afegint antipunts.

$$\begin{array}{r} 512 \\ -347 \\ \hline 2|-3|-5 \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet\bullet \\ \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \\ \hline \end{array}$$

$2 \quad -3 \quad -5$



Llavors, «fent no explotar» punts podem adequar aquesta solució (que és sòlida des del punt de vista matemàtic) als gustos de la societat.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet\bullet & \circ\circ & \circ\circ\circ \\ \hline 2 & -3 & -5 \\ \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet\bullet\bullet\bullet & \circ\circ\circ \\ \hline \cancel{2} & 10 & -5 \\ 1 & & \\ \end{array} \\
 \\
 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet\bullet\bullet & \circ\circ\circ \\ \hline \cancel{2} & 7 & -5 \\ 1 & & \\ \end{array} \\
 \\
 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet\bullet\bullet & \bullet\bullet\bullet\bullet & \circ\circ\circ \\ \hline \cancel{2} & \cancel{7} & -5 \\ 1 & 6 & 10 \\ \end{array} \\
 \\
 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet\bullet\bullet & \bullet\bullet\bullet \\ \hline \cancel{2} & \cancel{7} & 5 \\ 1 & 6 & \\ \end{array}
 \end{array}$$

No cal dir que la nostra solució inicial de $2 \mid -3 \mid -5$ es pot interpretar com 200 i -30 i -5, i també donarà 165.

Introducció

Podeu veure el vídeo de benvinguda, en què James introdueix aquesta experiència, aquí: <https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [0:45 minuts].



Piles i forats; punts i antipunts

Podeu veure un vídeo de James sobre aquesta lliçó aquí:
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [2:35 minuts].

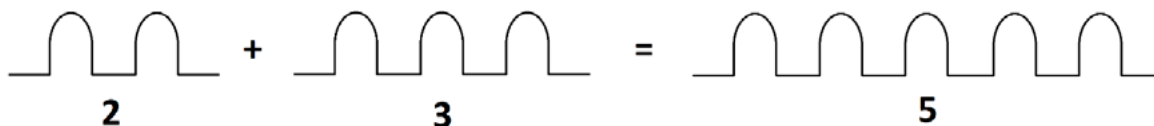
Aquí hi ha el guió que segueix James quan explica la lliçó a la pissarra. No cal dir que podeu adaptar-lo com més us convingui. Al vídeo podreu veure quan i com dibuixa James els diagrames i com els va ampliant.

Fins aquí hem vist com funcionen la suma i la multiplicació. Però ens hem saltat la resta. Per què? Doncs perquè no hi crec, en la resta! Per a mi, la resta no és altra cosa que la suma de l'oposat.

Arribats aquí, hem d'escollir. Amb els alumnes més petits puc optar per aquesta història de les piles i els forats.

El meu escepticisme cap a la resta em ve d'una altra història que no és certa. En resum, fa així.

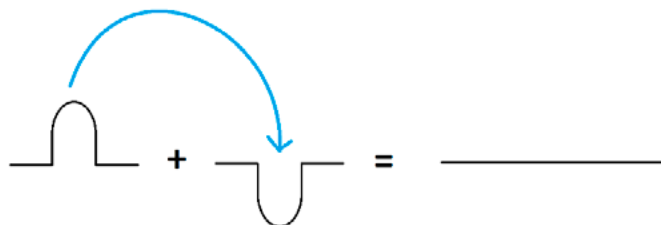
De nen jugava sovint en un sorral, on vaig descobrir els nombres naturals positius en forma de piles de sorra: una pila, dues piles..., i així successivament. A més, vaig descobrir com sumar nombres positius simplement alineant piles. Per exemple, vaig veure que dos més tres és igual a cinc alineant piles d'aquesta manera:



M'ho vaig passar bomba comptant i alineant piles per investigar les sumes.

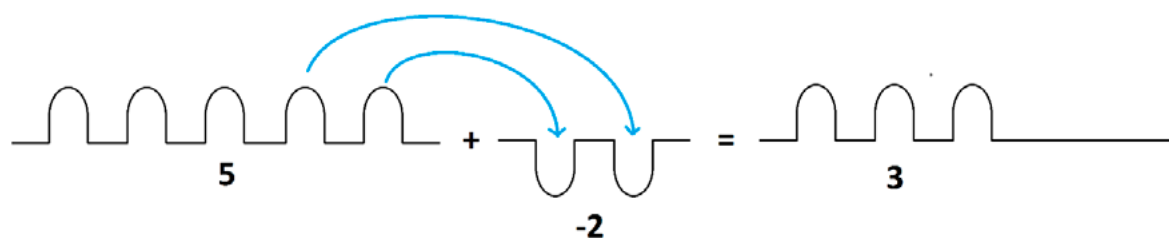


I un dia vaig tenir una sorprenent revelació! Em vaig adonar que, a banda de fer piles de sorra, també podia fer forats. I de seguida vaig veure que **un forat és l'oposat d'una pila: si ajuntem una pila i un forat, s'anul·len l'un a l'altre**. Ostres!



Més endavant, a l'escola em van ensenyar que «-1» era un forat i que «-2» eren dos forats, i així successivament, i em van dir que fes allò que anomenen *resta*. Però jo no hi vaig acabar de creure mai, en les restes. Els meus companys llegien $5 - 2$, per exemple, com «cinc menys dos», però jo pensava en cinc piles i en la suma de dos forats. A la imatge es veu que la solució són tres piles.





Sí, així obtinc el mateix resultat que els meus companys, és clar: els dos forats «resten» dues de les piles. Ara bé, jo tenia un avantatge. Per exemple, els meus companys deien que no hi ha solució per a $7 - 10$. Però jo vaig dir que sí que n'hi havia.

$7 - 10 =$ set piles i deu forats

$=$ tres forats

$= -3$

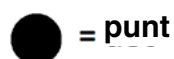
Fàcil!

La resta no és altra cosa que la suma de l'oposat.

(Per cert, no tinc cap problema a escriure $7 - 10$ com « $7 + -10$ ». D'aquesta manera es veu més clar el raonament.)

A partir d'aquí m'adreço als alumnes més grans, tot i que no deixaré de banda els més petits.

En la nostra màquina $1 \leftarrow 10$ hem treballat amb punts, que he dibuixat com punts compactes.



Ens cal el concepte de l'oposat del punt.

Ara tinc dos problemes: *Què és per a mi l'oposat d'un punt? I com dibuixo l'oposat d'un punt?*

No és broma: tots els adults amb què he treballat han proposat el terme *antipunt* per designar l'oposat d'un punt, mentre que els nens m'han proposat sempre el terme *nup*, és a dir, *punt* pronunciat a l'inrevés. A mi ja m'està bé el terme que la gent em proposi. (Aquí utilitzaré *anti-punt*.)

Hi ha alumnes que m'han proposat fer servir una X per dibuixar els antipunts, però els he dit que no perquè la X ja s'utilitza prou en matemàtiques i pot menar a confusió si comencem a fer àlgebra amb les nostres màquines de *Punts que exploten*. Així que demano als alumnes que dibuixin els antipunts com punts buits.

Molt bé, dibuixem un cercle buit per representar l'oposat d'un punt i l'anomenem *antipunt* (o *nup*).

 = antipunt



Com la matèria i l'antimatèria, que s'anul·len l'una a l'altra quan s'ajunten, un punt i un antipunt també s'haurien d'anul·lar l'un a l'altre —PUFFF!— quan s'ajunten, i no deixar res enrere.

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & + & \circ & = & \text{explosion} \\ 1 & & -1 & & 0 \end{array}$$

Normalment m'aturo aquí, però amb alumnes més petits aniria molt bé afegir els exemples següents:

I podem fer aritmètica bàsica amb punts i antipunts, com hem fet amb piles i forats.

$$\begin{array}{ccccc} \bullet \bullet \bullet \circ \circ & = & \bullet \bullet \\ 5 & + & -3 & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \circ \bullet \circ \bullet & = & \circ \\ 2 & + & -3 & = & -1 \end{array}$$

La resta

Podeu veure un vídeo de James sobre aquesta lliçó aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [6:07 minuts].

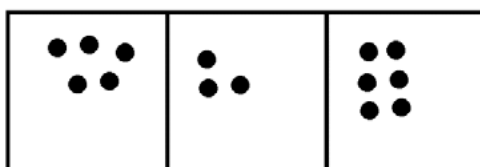
Molt bé. Ataquem la resta.

Vegem aquesta resta.

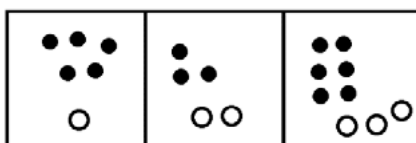
$$\begin{array}{r} 536 \\ - 123 \\ \hline \end{array}$$

Per a mi, això és 536 més l'oposat de 123.

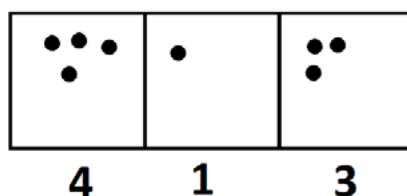
El primer nombre, 536, el veiem així en una màquina $1 \leftarrow 10$: cinc punts, tres punts, sis punts.



I ara afegim l'oposat de 123. És a dir, hi estem afegint una anticentena, dues antidesenes i tres antiunitats.



I ara ve un seguit d'aniquilacions entre els punts: PUFFF!; PUFFF PUFFF!; PUFFF PUFFF PUFFF!



En veiem el resultat: 413.

I fixeu-vos-hi: hem obtingut aquest resultat com si haguéssim anat d'esquerra a dreta i haguéssim dit:

5 menys 1 és 4,
3 menys 2 és 1
i 6 menys 3 és 3.

Això mateix! D'esquerra a dreta un altre cop!

$$\begin{array}{r} 536 \\ - 123 \\ \hline 413 \end{array}$$

Molt bé. Massa bonic, aquest exemple. Què tal $512 - 347$?

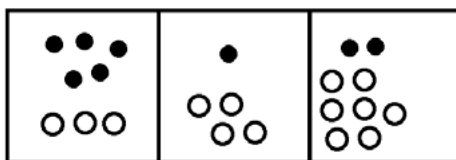
$$\begin{array}{r} 512 \\ - 347 \\ \hline \end{array}$$

Si anem d'esquerra a dreta, tenim: 5 menys 3 és 2; 1 menys 4 és -3 ; i 2 menys 7 és -5 . La solució és dues centenes tres-ta negatiu cinc negatiu.

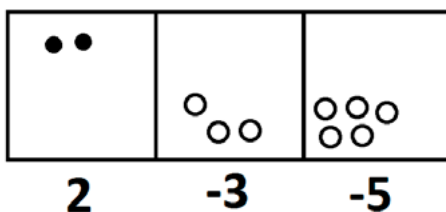
$$\begin{array}{r} 512 \\ - 347 \\ \hline 2|-3|-5 \end{array}$$

I és una solució absolutament correcta des del punt de vista matemàtic! Ho demostra la imatge.

Aquí tenim cinc centenes, una desena i dues unitats juntament amb tres anticentenes, quatre antidesenes i set antiunitats.



I després de totes les aniquilacions que hem vist, ens queden dues centenes exactes, tres antidesenes i cinc antiunitats.



La solució de debò és dues centenes tres-ta negatiu cinc negatiu!



No cal dir, però, que a la societat li sonarà molt estranya aquesta solució per a la nostra resta. Podem fer que aquesta solució, que és correcta des del punt de vista matemàtic, s'adeqüi als gustos de la societat?



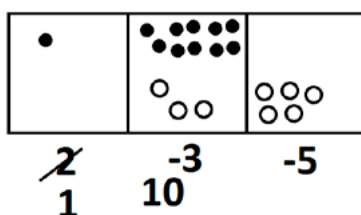
És un moment de reflexió per als alumnes. Finalment, algú té una revelació i proposa «fer no explotar» un punt.

Genial! Ens hi posem: fem no explotar punts! Qualsevol punt situat en una casella a l'esquerra ha de provenir de deu punts situats a la casella de la seva dreta, de manera que el podem fer no explotar per produir-ne deu punts.

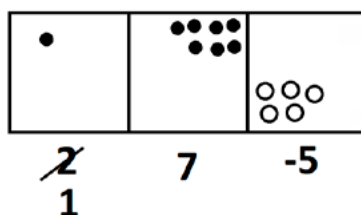
Pregunta: quin efecte de so hauríem de crear per a l'acció de fer no explotar?

Amb els alumnes, optem pel so d'una ventosa.

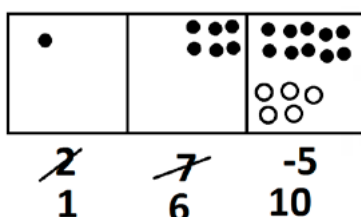
Molt bé. Fem no explotar ara un dels dos punts que tenim a la casella de l'esquerra del tot. La imatge resultant és aquesta:



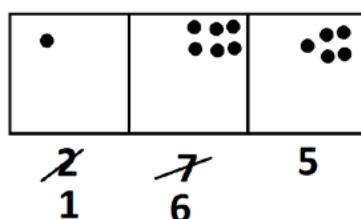
Després de les aniquilacions, veiem que ara tenim aquest resultat: una centena setanta cinc negatiu. Preciós!



Tornem a fer no explotar punts!



I amb algunes aniquilacions més, acabem obtenint una solució que la societat pot entendre: cent seixanta-cinc.



Apartat opcional: L'algoritme tradicional

Podeu veure un vídeo de James sobre aquesta lliçó opcional aquí:
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [2:25 minuts].

En què es diferencia aquest mètode dels punts i les caselles respecte de l'algoritme estàndard?

Tornem a veure $512 - 347$.

$$\begin{array}{r} 512 \\ -347 \\ \hline \end{array}$$

Amb l'algoritme estàndard, comencem per la dreta i ens fixem primer en «2 menys 7», que no es pot fer.

(Bé, sí que es pot fer i dona -5 , però no cal que ho feu amb aquest algoritme.)

Per tant, què heu de fer?

Us «en porteu un». És a dir, agafeu un punt de la columna de les desenes i el feu no explotar per tal de produir deu unitats. Això fa que quedin zero punts a la columna de les desenes. Hem d'escriure deu unitats perquè acompanyin el dos a la columna de les unitats.

$$\begin{array}{r} 0 \text{ }^{10} \\ 5\cancel{1}2 \\ -347 \\ \hline \end{array}$$

Però, com que som una mica llestos, escriurem 12 en comptes de $10 + 2$. (És a dir, posem un 1 abans del 2 perquè sembli un 12.)

$$\begin{array}{r} 0 \\ 5\cancel{1}^{12} \\ -347 \\ \hline \end{array}$$

I, aleshores, diem: «dotze menys set fan cinc», i escrivim aquest resultat.

$$\begin{array}{r} 0 \\ 5\cancel{1}^{12} \\ -347 \\ \hline 5 \end{array}$$



La columna de la dreta ja està completa. Canviem ara a la columna del mig.

Hi veiem «zero resta quatre», que no es pot fer. Per tant, fem una altra no explosió, és a dir, un altre «me'n porto», i aleshores hi tenim $10 - 4$, en aquesta columna. Escrivim el resultat, que és 6.

A continuació, passem a l'última columna, on tenim $4 - 3$, que dona 1.

$$\begin{array}{r} 40 \\ \cancel{5} \cancel{1}^1 2 \\ - 347 \\ \hline 65 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ \cancel{5} \cancel{1}^1 2 \\ - 347 \\ \hline 165 \end{array}$$

Uf!

Ho hem tornat a fer. Tots els mètodes matemàtics correctes són correctes, i triar-ne un o altre per fer restes és només una qüestió d'estil. Amb l'algoritme tradicional, anem de dreta a esquerra i fem totes les no explosions a mesura que avancem. Amb el mètode dels punts i les caselles, primer «anem fent» i, al final, duem a terme totes les no explosions. Tots dos mètodes són bons i correctes.



Material A: La resta

Utilitzeu el material que trobareu a continuació per als alumnes que vulguin practicar amb les preguntes d'aquesta lliçó i reflexionar-hi després a casa. NO són deures, és totalment opcional. (N'hi ha una versió imprimible al document *Punts que exploten*. Experiència 4.)

Punts que exploten

Experiència 4: La resta

Podeu accedir als vídeos de totes les lliçons de *Punts que exploten* aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

Material A: La resta

Ara podem fer una resta en una màquina $1 \leftarrow 10$ simplement afegint antipunts. (Hi ha qui prefereix anomenar-los *nups*.)

$$\begin{array}{r} 512 \\ -347 \\ \hline 2|-3|-5 \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet\bullet\bullet \\ \hline \circ\circ\circ \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet \\ \hline \circ\circ\circ \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet\bullet \\ \hline \circ\circ\circ\circ \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet\bullet \\ \hline \circ\circ\circ \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \circ\circ\circ \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \circ\circ\circ\circ \\ \hline \end{array}$$

2-3-5

Així doncs, amb les no explosions podem veure que aquest resultat és equivalent a 165.

Aquí teniu un enunciat que podeu plantejar, si voleu.

Calculeu les dues restes següents amb els dos mètodes: el de punts i caselles (amb una solució que pugui entendre la societat) i, després, el de l'algoritme tradicional. Les solucions haurien de coincidir.

$$\begin{array}{r} 6328 \\ - 4469 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 78390231 \\ - 32495846 \\ \hline \end{array}$$

Pregunta per reflexionar sobre la marxa: Quan adapteu les vostres solucions als gustos de la societat, què us sembla més fàcil: fer no explosions d'esquerra a dreta o de dreta a esquerra?

Pregunta addicional: Us sembla que amb el mètode de punts i caselles podeu anar tan ràpids com amb el mètode tradicional que feu servir ara?



Solucions a les preguntes de «Material A»

$$6328 - 4469 = 2 \mid -1 \mid -4 \mid -1 = 1 \mid 9 \mid -4 \mid -1 = 1 \mid 8 \mid 6 \mid -1 = 1 \mid 8 \mid 5 \mid 9 = 1859$$

$$\begin{aligned} 78390231 - 32495846 &= 4 \mid 6 \mid -1 \mid 0 \mid -5 \mid -6 \mid -1 \mid -5 \\ &= 4 \mid 5 \mid 9 \mid 0 \mid -5 \mid -6 \mid -1 \mid -5 \\ &= 4 \mid 5 \mid 8 \mid 10 \mid -5 \mid -6 \mid -1 \mid -5 \\ &= 4 \mid 5 \mid 8 \mid 9 \mid 5 \mid -6 \mid -1 \mid -5 \\ &= 4 \mid 5 \mid 8 \mid 9 \mid 4 \mid 4 \mid -1 \mid -5 \\ &= 4 \mid 5 \mid 8 \mid 9 \mid 4 \mid 3 \mid 9 \mid -5 \\ &= 4 \mid 5 \mid 8 \mid 9 \mid 4 \mid 3 \mid 8 \mid 5 = 45894385 \end{aligned}$$

Jo, personalment, trobo molt més fàcil fer les no explosions d'esquerra a dreta.

Material B: Exploracions brutals

Utilitzeu el material següent per facilitar-lo als alumnes que vulguin reflexionar després a casa amb preguntes profundes relacionades amb aquesta experiència. NO són deures, és totalment opcional, però podria servir de font per a futurs projectes dels alumnes. (N'hi ha una versió imprimible al document *Punts que exploten. Experiència 4.*)



Punts que exploten

Experiència 4: La resta

Podeu accedir als vídeos de totes les lliçons de *Punts que exploten* aquí:
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

Material B: Exploracions brutals

A sota teniu algunes investigacions sobre «grans preguntes»: podeu explorar-les o bé simplement reflexionar-hi. Divertiu-vos!

EXPLORACIÓ 1: HI HA ALGUNA ALTRA MANERA D'INTERPRETAR ELS RESULTATS QUE OBTENIM AMB ELS PUNTS I LES CASELLES?

Quan l'Omar va veure això,

$$\begin{array}{r} 512 \\ -347 \\ \hline 2|-3|-5 \end{array}$$

va escriure a la llibreta aquestes línies:

$$\begin{array}{r} 200 \\ -30 \\ -5 \end{array}$$

Després va dir que la solució havia de ser 165.

- Podeu explicar el que veia i pensava?
- Què penseu que va escriure l'Omar per a $7109 - 3384$?

EXPLORACIÓ 2: I QUÈ US SEMBLA LES SOLUCIONS NEGATIVES?

Com abordaríeu i interpretaríeu aquesta resta?

$$\begin{array}{r} 148 \\ -677 \\ \hline \end{array}$$

